$4°/a) z' = \overline{z} + \frac{z^2}{z} = re^{-i\theta} + \frac{r^2 e^{i2\theta}}{re^{-i\theta}} = re^{-i\theta} + re^{i3\theta}$

$= re^{i\theta}(re^{i2\theta} + e^{-i2\theta}) = re^{i\theta} 2\cos 2\theta = 2r\cos 2\theta e^{i\theta}$

$b) aff\overrightarrow{OM'} = z_{M'} - z_O = 2r\cos 2\theta e^{i\theta}$

$aff\overrightarrow{OM} = z_M - z_O = z = re^{i\theta} d'où\ aff\overrightarrow{OM'} = 2\cos 2\theta . aff\overrightarrow{OM}$

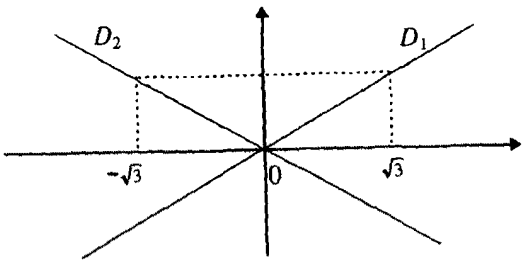
Conclusion : $\overrightarrow{OM'} = 2\cos 2\theta . \overrightarrow{OM}$ et par suite O,M et M' sont alignés .

$c) z' = z \Leftrightarrow \overline{z} + \frac{z^2}{z} = z \Leftrightarrow \frac{(\overline{z})^2 + z^2}{\overline{z}} = z$

$\Leftrightarrow (\overline{z})^2 + z^2 = z\overline{z} \Leftrightarrow (\overline{z})^2 + z^2 = |z|^2 \ or\ z = x + iy$

on a : $(x + yi)^2 + (x + yi)^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow$
$x^2 - y^2 - 2xyi + x^2 - y^2 + 2xyi = x^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2 - 3y^2 = 0$
$\Leftrightarrow x = \sqrt{3}y$ ou $x = -\sqrt{3}y$

L'ensemble (E) est la réunion des deux droites $D_1 : x - \sqrt{3}y = 0$ et $D_2 : x + \sqrt{3}y = 0$ privée du point O .



Solution 16 :

$1°/ f = \cos^3 x \sin 2x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 \left(\frac{e^{i2x} - e^{-i2x}}{2i}\right)$

$f = \frac{(e^{i3x} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-i3x})(e^{i2x} - e^{-i2x})}{16i}$